

9 Trabajo y potencia en máquinas

La energía que aparece en todos los ámbitos de la física: mecánica, electricidad, fisicoquímica, etc., es un nexo de unión entre estos y otros campos como la economía y el medio ambiente.

La relación de una máquina con el entorno se puede concretar en dos puntos: la tarea que realiza, que comporta una manipulación mecánica del entorno, y un balance energético, que se realiza contabilizando: *a)* energía suministrada, *b)* energía útil para la realización de la tarea encomendada, *c)* energía disipada en las resistencias pasivas necesaria pero no aprovechable y *d)* energía mecánica de la máquina, cinética más potencial.

La energía suministrada puede provenir de diferentes fuentes –electricidad, combustibles, viento, etc. La energía disipada usualmente lo es en forma de calor y la energía útil puede serlo para realizar tareas diferentes: deformar materiales en una prensa, comprimir un gas en un compresor, mover un generador eléctrico en un aerogenerador, etc.

9.1 Teorema de la energía

El teorema de la energía aplicado a un sistema mecánico plantea el balance siguiente entre dos estados mecánicos 1 y 2:

$$\Delta E_c]_1^2 = \sum W]_1^2$$

donde $\Delta E_c]_1^2$ es la variación de la energía cinética y $\sum W]_1^2$ es el trabajo realizado por todas las fuerzas, tanto exteriores aplicadas sobre el sistema como interiores a él.

Cálculo de la energía cinética. La energía cinética es la magnitud aditiva

$$E_c = \frac{1}{2} \sum m(P)v^2(P)$$

donde $m(P)$ es la masa de la partícula P y $v(P)$ es su velocidad. Para calcularla se ha de sumar la energía cinética de todos los componentes del sistema. Para un sistema multisólido formado por un conjunto de N miembros, enlazados o no, la energía cinética se calcula, teniendo en cuenta su aditividad y la descomposición baricéntrica, según la expresión:

$$E_c = \sum_{i=1}^N (E_{c_{i_{\text{traslación}}}} + E_{c_{i_{\text{rotación}}}}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v^2(G_i) + E_{c_{\text{RTG}_i}} \right)$$

donde $v(G_i)$ es la velocidad del centro de inercia de cada miembro y $E_{c_{\text{RTG}_i}}$ es la energía cinética de cada miembro en la referencia que se traslada con su centro de inercia –energía cinética de rotación. Si el miembro es un sólido rígido, su energía cinética de rotación se calcula con la expresión:

$$E_{c_{\text{RTG}_i}} = \frac{1}{2} \omega_i^T [I_{G_i}] \omega_i$$

siendo ω_i la velocidad angular e I_{G_i} el tensor de inercia respecto al centro de inercia. Para sólidos con movimiento plano, esta expresión se calcula de forma simplificada como $E_{c_{\text{RTG}_i}} = \frac{1}{2} I_G \omega^2$, donde I_G es el momento de inercia en G para la dirección perpendicular al plano del movimiento.

Cálculo del trabajo. El trabajo hecho por una fuerza $F(P)$ aplicada en un punto P es

$$W]_1^2 = \int_1^2 F(P) \cdot ds(P) = \int_1^2 F(P) \cdot v(P) dt$$

La primera integral es a lo largo de la trayectoria que P recorre para ir de la posición 1 a la 2 y la segunda es a lo largo del tiempo gastado para ir de 1 a 2.

Ejemplo 9.1 El rodillo de la figura 9.1 parte del reposo y, arrastrado por la fuerza horizontal F constante, gira sin deslizar sobre el plano horizontal. Su energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2} m(\omega r)^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} (mr^2 + I_G) \omega^2$$

y el incremento de energía cinética desde el estado inicial es

$$\Delta E_c]_1^2 = \frac{1}{2} (mr^2 + I_G) \omega^2$$

De las fuerzas que actúan sobre el rodillo, sólo F hace trabajo

$$W]_1^2 = \int_1^2 F ds(G) = F \Delta s$$

siendo Δs el camino recorrido por el centro del rodillo. El peso mg no hace trabajo, ya que en todo instante es perpendicular a la velocidad de G, $mg \cdot v(G) = 0$ y las fuerzas de enlace en el punto de contacto J tampoco, ya que están aplicadas en cada instante a un punto de velocidad nula –el rodillo no desliza.

Entonces el teorema de la energía establece que

$$F \Delta s = \frac{1}{2} (mr^2 + I_G) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_G}{r^2} \right) v^2$$

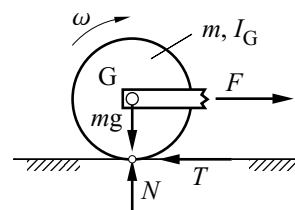


Fig. 9.1 Rodillo

Energía mecánica. Si en el teorema de la energía se hace la distinción entre fuerzas que deriven de potencial –conservativas– y fuerzas no conservativas, y el trabajo hecho por las primeras se escribe como $W_c = -\Delta E_p]_1^2$, donde E_p es su energía potencial, se obtiene

$$\Delta E_c]_1^2 = -\Delta E_p]_1^2 + W_{nc}]_1^2 \rightarrow \Delta(E_c + E_p)]_1^2 = W_{nc}]_1^2 \rightarrow \Delta E_m]_1^2 = W_{nc}]_1^2$$

La suma $E_c + E_p = E_m$ –energía mecánica del sistema– es función únicamente del estado mecánico del sistema, de las posiciones, por lo que se refiere a la energía potencial, y de las posiciones y velocidades, por lo que se refiere a la energía cinética. W_{nc} –trabajo de las fuerzas no conservativas– no es función del estado mecánico del sistema y se puede interpretar como el incremento de la energía mecánica causado tanto por los fenómenos mecánicos como por los no mecánicos que intervienen en la evolución del sistema al pasar del estado 1 al 2. Entonces, los fenómenos no mecánicos –en los que intervienen magnitudes diferentes de masa, espacio y tiempo– se manifiestan en el contexto de la mecánica como fuerzas no conservativas que realizan un trabajo asociado a la energía que intercambian. Así, por ejemplo, en un motor eléctrico la interacción eléctrica entre el estator y el rotor se manifiesta en la mecánica como el par motor que realiza un trabajo función de la energía eléctrica suministrada al motor.

Elección del sistema. Al aplicar el teorema de la energía, como en todo análisis dinámico, se ha de poner mucha atención en la definición del sistema que se estudia y especificar correctamente tanto el contenido como la interacción con el exterior. El contenido interviene en el cálculo de la energía cinética y del trabajo de las fuerzas interiores, como también en el de las fuerzas de inercia si la referencia de estudio no es galileana. La interacción con el exterior interviene en el cálculo del trabajo de las fuerzas exteriores y de la energía intercambiada.

9.2 Principio de conservación de la energía

El principio de conservación de la energía establece, para toda evolución de un sistema entre dos estados,

$$\text{Energía recibida del exterior} = \text{energía cedida al exterior} + \text{energía acumulada en el interior}$$

Por ejemplo, en una máquina equipada con un motor eléctrico (Fig. 9.2), el principio de conservación de la energía aplicado al sistema formado por la máquina más el motor se puede expresar como

$$E_{\text{eléctrica suministrada}} = \Delta E_{m \text{ mot.}} + \Delta E_{m \text{ máq.}} + \Delta E_{\text{térmica mot.}} + \Delta E_{\text{térmica máq.}} + E_{\text{dissipada mot.}} + E_{\text{dissipada máq.}} + E_{\text{útil}} \quad (9.1)$$

ya que al sistema se le suministra energía eléctrica, que se convierte en energía mecánica –por ejemplo, cinética– y en otras –por ejemplo, térmica, a causa de las resistencias pasivas. Parte de esta energía térmica puede permanecer en el sistema y aumentar su temperatura $-\Delta E_{\text{térmica}}$ – y parte es liberada al exterior $-E_{\text{dissipada}}$.

Ya que la experiencia pone de manifiesto que un motor eléctrico sólo es capaz de transformar una parte de la energía eléctrica que se le suministra en energía mecánica, en forma de trabajo $-W_{\text{mot.}}$ –

hecho por el par que el eje hace sobre el exterior, el principio de la conservación de la energía aplicado al sistema motor (Fig. 9.3) se puede escribir como

$$E_{\text{eléctrica suministrada}} = W_{\text{motor}} + \Delta E_{\text{m mot.}} + \Delta E_{\text{térmica mot.}} + E_{\text{dissipada en el motor}} \quad (9.2)$$

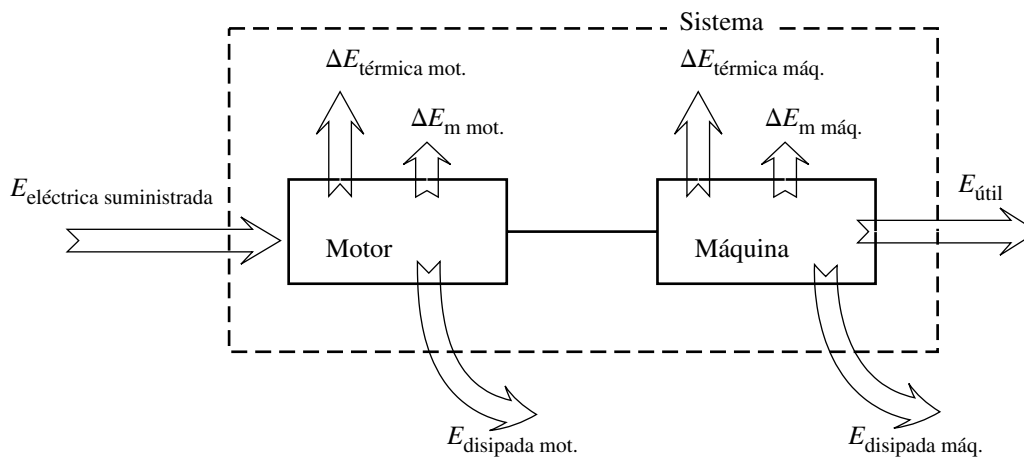


Fig. 9.2 Flujos de energía en un sistema formado por una máquina y un motor

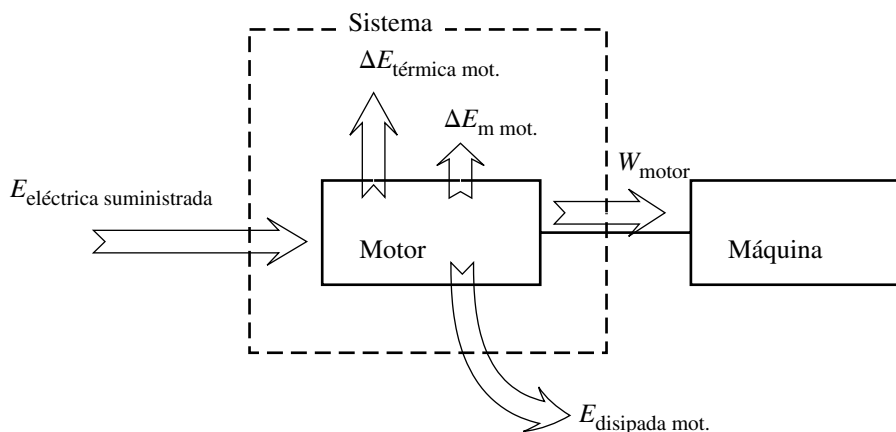


Fig. 9.3 Flujos de energía considerando como sistema al motor

Entonces, igualando ambas ecuaciones 9.1 y 9.2 y reagrupando se obtiene

$$W_{\text{motor}} = \Delta E_{\text{m máq.}} + \Delta E_{\text{térmica máq.}} + E_{\text{dissipada máq.}} + E_{\text{útil}} \quad (9.3)$$

La expresión 9.3 se puede escribir directamente considerando el sistema máquina (Fig. 9.4).

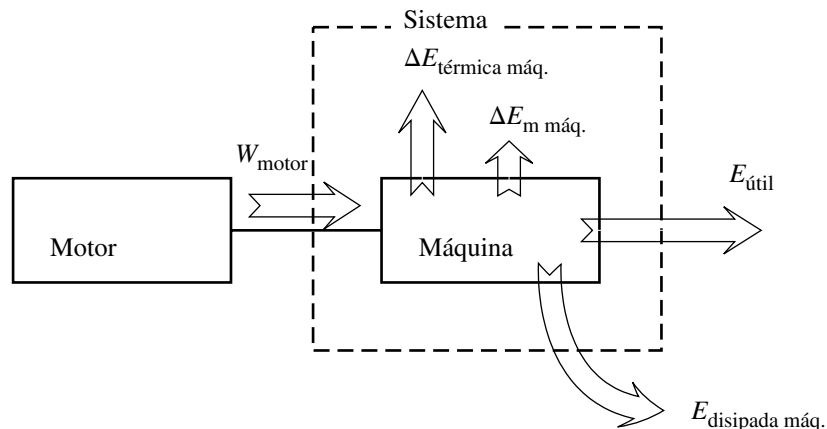


Fig. 9.4 Flujos de energía considerando como sistema la máquina

En el ámbito de las máquinas, se ha de pensar que el teorema de la energía es una aplicación del principio de la conservación de la energía, de manera que:

- Al utilizar el teorema de la energía no se han de incluir necesariamente todos los fenómenos no mecánicos a través del trabajo hecho por las fuerzas no conservativas, sino que todos o algunos se pueden incluir directamente a través de la energía que tienen asociada.
- En el principio de la conservación de la energía, una parte de la energía almacenada puede ser mecánica en forma de energía cinética y/o potencial y una parte de la energía intercambiada puede ser mecánica, en forma de trabajo hecho por fuerzas.

Así, por ejemplo, en un motor de combustión interna el principio de la conservación de la energía establece:

$$E_{\text{combustible}} = \Delta E_m + \Delta E_{\text{térmica}} + E_{\text{disipada}} + W_{\text{motor}}$$

expresión que se puede reescribir aplicando el teorema de la energía.

$$\Delta E_c = E_{\text{combustible}} + W_{\text{fuerzas conservativas}} - W_{\text{motor}} - \Delta E_{\text{térmica}} - E_{\text{disipada}}$$

9.3 Versión diferencial del teorema de la energía

Frecuentemente es útil expresar el teorema de la energía en versión diferencial

$$\dot{E}_c = \sum P, \text{ donde } P = \dot{W} \text{ es la potencia asociada a cada una de las fuerzas.}$$

Para un sólido rígido, la derivada temporal de la energía cinética es

$$\dot{E}_c = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2(G) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot [\mathbf{I}_G] \cdot \boldsymbol{\omega} \right) = m \mathbf{v}(G) \cdot \mathbf{a}(G) + ([\mathbf{I}_G] \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

De nuevo, la derivada de la energía cinética asociada a la rotación se calcula de forma simplificada para un sólido con movimiento plano como $I_G \omega \alpha$.

Cálculo de la potencia. La potencia asociada a una fuerza $F(P)$ aplicada en un punto P es

$$P = F(P) \cdot v(P), \text{ donde } v(P) \text{ es la velocidad de P.}$$

La potencia asociada a un sistema de fuerzas que actúan sobre un sólido rígido y caracterizadas mediante su torsor en el punto O –fuerza resultante F y momento resultante $M(O)$ – es, tal como se demuestra en el capítulo 8,

$$P = F \cdot v(O) + M(O) \cdot \omega$$

En máquinas con funcionamiento cíclico, se acostumbra a trabajar con magnitudes medias en un ciclo. Así, por ejemplo, la potencia de un motor –magnitud característica de todos los motores– es la potencia media a lo largo de un ciclo.

En sistemas de un grado de libertad y sin resistencias pasivas que dependan de las fuerzas de enlace, la aplicación de esta versión del teorema de la energía da la ecuación del movimiento –es totalmente equivalente a aplicar el método de las potencias virtuales con un movimiento virtual compatible con los enlaces. Si en lugar de aplicar esta versión del teorema de la energía, se aplica la versión integrada, se obtiene una integral primera de la ecuación del movimiento.

Ejemplo 9.2 En el rodillo del ejemplo 9.1 la derivada de la energía cinética es $\dot{E}_c = (mr^2 + I_G)\omega\alpha$ y la potencia asociada a la fuerza es $P = F \cdot v(G) = F \omega r$ de manera que la aplicación de la versión diferencial del teorema de la energía lleva a la ecuación

$$Fr = (mr^2 + I_G)\alpha$$

Esta expresión es, de hecho, una ecuación diferencial de segundo orden en la coordenada φ que describe el ángulo girado por el rodillo, $\dot{\varphi} = \alpha$. Por lo tanto, es la ecuación del movimiento del rodillo. La ecuación encontrada en el ejemplo 9.1 es una ecuación diferencial de primer orden en φ , ya que $\Delta s = \varphi r$ y

$$Fr = \frac{1}{2}(mr^2 + I_G)\dot{\varphi}$$

La equivalencia entre el teorema de la energía y el principio de la conservación de la energía es válida, evidentemente, en versión diferencial.

9.4 Rendimiento

En una máquina o subconjunto –reductor, motor, etc.– se define el rendimiento η como el cociente entre la potencia considerada útil y la potencia suministrada:

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{suministrada}}}$$

Para un período determinado de funcionamiento entre dos estados 1 y 2, el rendimiento medio es

$$\eta = \frac{E_{\text{útil}} \int_1^2}{E_{\text{suministrada}} \int_1^2}$$

En un motor eléctrico, considerando la potencia eléctrica como suministrada y la potencia mecánica como útil, el rendimiento electromecánico es

$$\eta_{\text{electromecánico}} = \frac{P_{\text{mecánica del motor}}}{P_{\text{eléctrica suministrada}}}, \text{ donde } P_{\text{mecánica del motor}} = \Gamma_{\text{motor}} \omega_{\text{motor}}$$

y el rendimiento mecánico de la máquina que acciona si, por ejemplo, es un elevador, es

$$\eta_{\text{mecánico}} = \frac{\Delta E_{\text{p carga}}}{W_{\text{motor}}}$$

Así, el rendimiento global del elevador, calculado a partir de la energía eléctrica suministrada y el trabajo útil realizado es

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{p carga}}}{E_{\text{eléctrica suministrada}}}$$

En ocasiones, y según la definición que se haga, el rendimiento de una máquina puede ser superior a 1; este es el caso de una bomba de calor si el rendimiento se define como

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{E_{\text{térmica suministrada por la bomba}}}{E_{\text{eléctrica consumida}}}$$

En otros casos, el rendimiento puede ser nulo; por ejemplo, en un vehículo que sale de un punto (estado 1) y retorna al punto de partida (estado 2), si se define el rendimiento

$$\eta_{\text{vehículo}} = \frac{\Delta E_{\text{m}} \int_1^2}{E_{\text{combustible consumido}} \int_1^2}$$

Las resistencias pasivas de las máquinas, que se oponen a sus movimientos, son una de las causas principales del rendimiento no unitario de éstas y están causadas por fenómenos diversos:

- Fricción entre las superficies de contacto en los enlaces.
- Histéresis en la deformación de los sólidos.
- Viscosidad en el movimiento de fluidos –lubricantes, refrigerantes, etc.
- Avance de sólidos dentro de fluidos –resistencias aerodinámicas, etc.

Todas ellas se describen con modelos adecuados. Así, por ejemplo, para la fricción entre superficies secas se utiliza el modelo de roce seco de Coulomb y las resistencias pasivas que ocasiona son función de las fuerzas y/o los momentos que actúan sobre la máquina –carga de la máquina–, ya que estas modifican las fuerzas de enlace y, como consecuencia de esto, las fuerzas tangenciales. Las

resistencias pasivas también pueden ser función de la velocidad; este es el caso, por ejemplo, de las resistencias aerodinámicas proporcionales al cuadrado de la velocidad del sólido respecto al fluido.

Las resistencias pasivas realizan un trabajo negativo que corresponde a potencia no útil P_{rp} , pero que es necesario suministrar a la máquina para que funcione. En una máquina en que toda la potencia perdida se pueda considerar asociada a resistencias pasivas, se puede escribir la relación

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{sum.}}} = \frac{P_{\text{sum.}} - P_{rp}}{P_{\text{sum.}}} = 1 - \frac{P_{rp}}{P_{\text{sum.}}}$$

El rendimiento de una máquina, igual que las resistencias pasivas, puede depender de su carga y de su velocidad. Evidentemente, la dependencia no será la misma.

Así, por ejemplo, en una máquina accionada por un motor de par Γ_m y velocidad ω_m que funciona en régimen estacionario, si se expresa la potencia disipada en función de las resistencias pasivas reducidas al eje del motor Γ_{rp} (ver apartado 9.5) se puede escribir

$$P_{rp} = (1 - \eta)P_{\text{sum.}} = (1 - \eta)\Gamma_m\omega_m = \Gamma_{rp}\omega_m$$

$$(1 - \eta)\Gamma_m = \Gamma_{rp}$$

Si se toma la hipótesis de que el rendimiento es independiente de la carga –el par motor es función directa de esta–, las resistencias pasivas crecen con ella. Si la hipótesis que se hace es que las resistencias pasivas son independientes de la carga, entonces el rendimiento aumenta a medida que lo hace la carga.

$$\eta = 1 - \frac{\Gamma_{rp}}{\Gamma_m}$$

Si las hipótesis anteriores no se ajustan suficientemente a la realidad o la máquina no está en régimen estacionario, se puede prever la utilización de un rendimiento función de la velocidad o, de una manera más detallada, de un modelo adecuado de las diferentes resistencias pasivas presentes e incluirlas a través del trabajo asociado.

9.5 Inercia y fuerza reducidas a una coordenada

Es usual caracterizar el comportamiento inercial de una máquina de un grado de libertad mediante su inercia reducida; así, por ejemplo, se tiene la inercia reducida en la rotación del eje –o simplemente al eje– de un motor o la inercia reducida a la rotación del eje de entrada de un reductor.

Frecuentemente también se utiliza el concepto de fuerza reducida para globalizar y simplificar un planteamiento, como por ejemplo la fuerza de tracción reducida al movimiento del enganche –o simplemente en el enganche– de un tractor ferroviario o las resistencias pasivas de un vehículo reducidas a su movimiento de avance.

Inercia reducida. En un sistema mecánico de un grado de libertad, si se toma como tal a la derivada \dot{q} de la coordenada generalizada q , la expresión de la energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 \quad (9.4)$$

donde $m(q)$ recibe el nombre de inercia *reducida a la coordenada q* .

Si la coordenada generalizada utilizada es un ángulo, la inercia reducida tiene dimensiones de momento de inercia, y si es una coordenada lineal, tiene dimensiones de masa. Se ha de subrayar que, en principio, la inercia reducida es función de la configuración.

Ejemplo 9.3 En un reductor como el de la figura 9.5 de relación de transmisión τ , el momento axial de inercia del eje 1 de entrada es I_1 y el del eje 2 de salida es I_2 . La energía cinética del reductor es

$$E_c = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} (I_1 + \tau^2 I_2) \omega_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{\tau^2} + I_2 \right) \omega_2^2$$

Así, la inercia del reductor es

$$\begin{aligned} \text{reducida al eje 1} & \quad I_{\text{red. 1}} = I_1 + \tau^2 I_2 \\ \text{reducida al eje 2} & \quad I_{\text{red. 2}} = I_1/\tau^2 + I_2 \end{aligned}$$

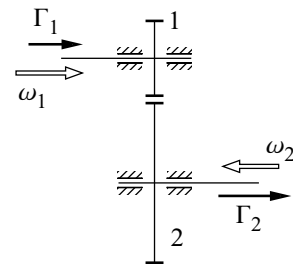


Fig. 9.5 Reductor de una etapa

Fuerza reducida. Para un conjunto de fuerzas aplicadas a puntos de un sistema de un grado de libertad, la fuerza reducida a la coordenada generalizada q es aquel factor que, multiplicado por su derivada temporal \dot{q} , da la potencia del conjunto de fuerzas con un movimiento \dot{q}_i ($\dot{q}_i \neq 0, \dot{q}_{j \neq i} = 0$).

$$\sum (\mathbf{F}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P})) = F_{\text{red.}}(q, \dot{q}) \dot{q}$$

Si la coordenada generalizada independiente es un ángulo, la fuerza reducida tiene unidades de momento y suele llamarse par *reducido*. Si es una coordenada lineal, tiene dimensiones de fuerza.

Ejemplo 9.4 En el reductor del ejemplo anterior, sobre el eje 1 actúa el par Γ_1 , procedente del motor, y sobre el eje 2 el par Γ_2 , procedente de la máquina que acciona. La potencia de estos dos pares es

$$P = \Gamma_1 \omega_1 - \Gamma_2 \omega_2 = (\Gamma_1 - \tau \Gamma_2) \omega_1 = \left(\frac{\Gamma_1}{\tau} - \Gamma_2 \right) \omega_2$$

de manera que para a estos dos pares el par reducido es:

$$\begin{aligned} \text{al eje de entrada} & \quad \Gamma_{\text{red. 1}} = \Gamma_1 - \tau \Gamma_2 \\ \text{al eje de salida} & \quad \Gamma_{\text{red. 2}} = \Gamma_1/\tau - \Gamma_2 \end{aligned}$$

En una máquina de un grado de libertad, si las fuerzas que actúan diferentes de las de enlace no son función de éstas, la ecuación del movimiento se puede determinar a partir de la inercia reducida y de la fuerza reducida. Derivando la expresión 9.4 de la inercia reducida

$$\dot{E}_c = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 \right) = \frac{1}{2} m_q(q) \dot{q}^3 + m(q) \ddot{q} \dot{q} \quad \text{con} \quad m_q(q) = \frac{\partial m(q)}{\partial q}$$

y aplicando el teorema de la energía, $\dot{E}_c = \sum P = F_{\text{red.}}(q, \dot{q}) \dot{q}$, la ecuación del movimiento queda

$$m(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} m_q(q) \dot{q}^2 = F_{\text{red.}}(q, \dot{q}) \tag{9.5}$$

En el reductor que hemos tomado como ejemplo en este apartado, la ecuación del movimiento puede ser, dependiendo de si se toma la velocidad del eje 1 o del eje 2 como independiente,

$$\begin{aligned} (I_1 + \tau^2 I_2) \dot{\omega}_1 &= \Gamma_1 - \tau \Gamma_2 \\ (I_1 / \tau^2 + I_2) \dot{\omega}_2 &= \Gamma_1 / \tau - \Gamma_2 \end{aligned}$$

Es interesante observar que, si la inercia reducida es constante y la fuerza reducida sólo es función de la velocidad $F_{\text{red.}}(\dot{q})$ –hipótesis aceptables en un buen número de casos–, la ecuación 9.5 es integrable por separación de variables

$$\begin{aligned} m \ddot{q} &= F_{\text{red.}}(\dot{q}); \quad m \frac{d}{dt} \dot{q} = F_{\text{red.}}(\dot{q}), \quad \text{donde} \\ \int dt &= m \int \frac{1}{F_{\text{red.}}(\dot{q})} d\dot{q} \end{aligned}$$

de manera que se tiene el tiempo necesario para conseguir una determinada velocidad.

Ejemplo 9.5 El yugo escocés de la figura 9.6 tiene la manivela equilibrada, de manera que su centro de inercia se encuentra sobre la articulación O fija. Para estudiar su cinemática se toma el vector de coordenadas generalizadas $q = \{x, \varphi\}^T$. Las ecuaciones de enlace geométrica y cinemática son

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ \dot{x} &= -r \dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

La energía cinética del mecanismo función de \dot{q} es

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2$$

La potencia desarrollada por el par Γ y la fuerza F aplicada a la manivela se puede expresar como

$$P = -F \dot{x} + \Gamma \dot{\varphi}$$

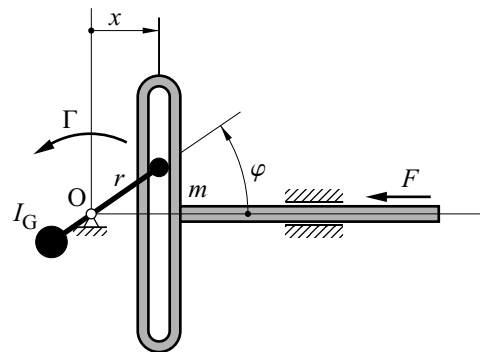


Fig. 9.6 Yugo escocés

Si se toma φ como coordenada independiente, la expresión de la energía cinética y de la potencia adoptan la forma:

$$E_c = \frac{1}{2}(I_G + mr^2 \sin^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 ; P = (Fr \sin \varphi + \Gamma)\dot{\varphi}$$

Así, la inercia reducida $m(\varphi)$ y la fuerza reducida $F_{\text{red.}}(\varphi)$, para la coordenada φ , tienen la expresión:

$$m(\varphi) = I_G + mr^2 \sin^2 \varphi ; F_{\text{red.}}(\varphi) = \Gamma + Fr \sin \varphi$$

En este caso, al ser la coordenada independiente angular, $m(\varphi)$ tiene unidades de momento de inercia y $F(\varphi)$ de momento. La ecuación del movimiento 9.5, si las resistencias pasivas son despreciables, es

$$(I_G + mr^2 \sin^2 \varphi)\ddot{\varphi} + (mr^2 \sin \varphi \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 = \Gamma + Fr \sin \varphi$$

9.6 Régimen de funcionamiento de las máquinas. Grado de irregularidad

Se define el régimen de funcionamiento de una máquina como su manera de funcionar a lo largo del tiempo. Así, se distingue entre régimen *permanente* o *intermitente* según si la máquina funciona constantemente o no durante el período de observación.

Si el régimen es permanente se dice que es *estacionario*, desde el punto de vista mecánico, si las velocidades o las sus propiedades estadísticas se mantienen a lo largo del tiempo. En caso contrario, se dice que es *transitorio*.

Un régimen estacionario es cíclico si las variables de estado de la máquina se repiten periódicamente.

Frecuentemente se considera que una máquina tiene un régimen determinado en función del estudio que se quiere realizar y del tiempo de estudio que se considere. Así, por ejemplo, el funcionamiento de un ascensor a lo largo de un día se considera en régimen intermitente, mientras que si se quiere estudiar un viaje del ascensor se considerará que hay un transitorio de arranque –aceleración–, un régimen estacionario –velocidad constante– y un transitorio de parada –frenada.

Grado de irregularidad. En un régimen estacionario, el grado de irregularidad δ es un indicador de la variación de las velocidades al entorno del valor medio. Para una máquina de un grado de libertad, y utilizando la velocidad generalizada \dot{q} , el grado de irregularidad se puede definir como

$$\delta = \frac{\sigma_{\dot{q}}}{\mu_{\dot{q}}}, \text{ donde } \sigma_{\dot{q}} \text{ es la desviación estándar y } \mu_{\dot{q}} \text{ la mediana de } \dot{q}.$$

En los estudios clásicos para máquinas rotativas con funcionamiento cíclico, se define el grado de irregularidad de la manera siguiente:

$$\delta = \frac{\omega_{\text{máx.}} - \omega_{\text{mín.}}}{\omega_{\text{mediana}}} \quad (9.6)$$

con $\omega_{\text{mediana}} = 2 \pi n$, siendo n la frecuencia de giro del eje principal de la máquina, y $\omega_{\text{máx.}}$ y $\omega_{\text{mín.}}$ las velocidades angulares máxima y mínima de este eje en una vuelta.

Este grado de irregularidad aparece típicamente en máquinas con funcionamiento cíclico accionadas por motores de par variable a lo largo del ciclo, como por ejemplo los motores de explosión, o en máquinas con carga variable a lo largo del ciclo, como por ejemplo en las prensas.

Cálculo del grado de irregularidad de un sistema de un grado de libertad con funcionamiento cíclico. Para la determinación estricta del grado de irregularidad se ha de conocer la evolución de \dot{q} a lo largo de un ciclo, ya sea como función del tiempo, $\dot{q}(t)$, o como trayectoria en el plano de fases, $f(q, \dot{q}) = 0$.

Un procedimiento utilizado frecuentemente en el diseño para la determinación aproximada del grado de irregularidad según la expresión 9.6 consiste en suponer que la inercia reducida es aproximadamente constante $-m-$ y aplicar el teorema de la energía entre los estados de energía cinética máxima y mínima. De esta manera, se iguala el incremento de energía cinética entre estos estados con la máxima variación de energía $\Delta E_{\text{máx.}}$ en un ciclo y se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{máx.}} &= \frac{1}{2} m (\dot{q}_{\text{máx.}}^2 - \dot{q}_{\text{mín.}}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{q}_{\text{máx.}} + \dot{q}_{\text{mín.}}) (\dot{q}_{\text{máx.}} - \dot{q}_{\text{mín.}}) \approx \\ &\approx m \dot{q}_{\text{mediana}} (\dot{q}_{\text{máx.}} - \dot{q}_{\text{mín.}}) = m \dot{q}_{\text{mediana}}^2 \delta \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\text{de donde } \delta \approx \frac{\Delta E_{\text{máx.}}}{m \dot{q}_{\text{mediana}}^2}$$

9.7 Volantes

La introducción de un volante en una cadena cinemática puede tener, en principio, los objetivos y efectos siguientes:

1. Regularizar las velocidades, fuerzas y pares, es decir, disminuir su grado de irregularidad.
2. Disponer de una cierta capacidad para almacenar energía a corto plazo.
3. Almacenar elevadas cantidades de energía para utilizar a largo término.
4. Modificar el comportamiento vibratorio de la cadena.

El primero se basa en el efecto dinámico de aumentar la inercia de la cadena y, por tanto, disminuir las aceleraciones.

El segundo efecto se basa en el aumento de energía cinética de la cadena que permite intercambios de energía, más o menos rápidos y elevados, con modificaciones moderadas de las velocidades. En ocasiones la cadena cinemática sin el volante podría no tener suficiente energía cinética para vencer una demanda exterior de energía necesaria para continuar el funcionamiento, por ejemplo en prensas, motores de combustión y compresores.

Estos dos puntos se suelen considerar en regímenes estacionarios cíclicos, si bien esto no es estrictamente necesario.

El tercer efecto se basa en la capacidad del volante para acumular una cantidad de energía suficiente para garantizar el funcionamiento de la cadena durante un tiempo, encargándose de las pérdidas por resistencias pasivas y demandas exteriores de energía –acumulador cinético. En este punto, el volante tiene claramente un régimen transitorio, ya que comienza con mucha energía cinética y acaba con muy poca. Son ejemplos de aplicación de los volantes como acumuladores de energía algunos vehículos hoy por hoy experimentales y los vehículos de juguete con motor de inercia.

El estudio del comportamiento vibratorio de la cadena cinemática se ha de realizar en el contexto de las vibraciones mecánicas, tema que no se incluye en este texto.

Dinámica de una cadena cinemática con volante. Con el fin de estudiar el efecto de un volante en una cadena cinemática con régimen cíclico, en la figura 9.7 se presenta el esquema de un motor y la máquina accionada, entre los que se ha introducido un volante.

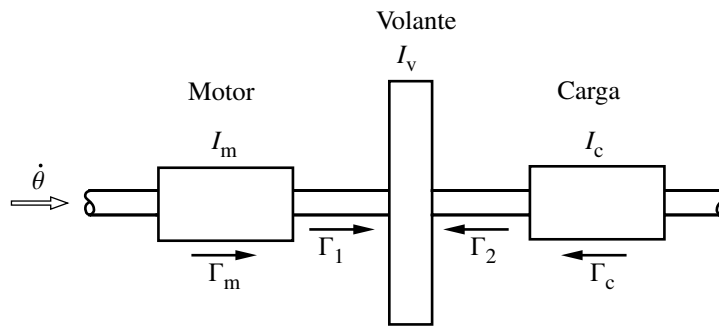


Fig. 9.7 Esquema de una cadena motor-volante-carga

- Γ_1, Γ_2 Pares que el eje izquierdo y el eje derecho hacen sobre el volante, respectivamente
- Γ_m Par motor reducido para la rotación del volante
- Γ_c Par de carga reducido para la rotación del volante
- I_m, I_c Inercias reducidas del motor y de la carga para la rotación del volante
- I_v Momento de inercia del volante respecto al eje de giro

Aplicando el teorema de la energía a toda la cadena cinemática, se obtiene la ecuación del movimiento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (I_m(\theta) + I_v + I_c(\theta)) \dot{\theta}^2 \right) = (\Gamma_m - \Gamma_c) \dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2} (I_{m\theta} + I_{c\theta}) \dot{\theta}^2 + (I_m(\theta) + I_v + I_c(\theta)) \ddot{\theta} = \Gamma_m - \Gamma_c \quad \text{con} \quad \begin{cases} I_{m\theta} = \frac{\partial I_m(\theta)}{\partial \theta} \\ I_{c\theta} = \frac{\partial I_c(\theta)}{\partial \theta} \end{cases}$$

de donde

$$\ddot{\theta} = \frac{(\Gamma_m - \Gamma_c) - \frac{1}{2} (I_{m\theta} + I_{c\theta}) \dot{\theta}^2}{(I_m(\theta) + I_v + I_c(\theta))}$$

Aplicando el teorema de la energía al motor, a la carga y al volante se obtienen los pares Γ_1 y Γ_2

$$\Gamma_1 = \Gamma_m - I_m(\theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}I_{m\theta}\dot{\theta}^2$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 - I_v\ddot{\theta} = \Gamma_c + I_c(\theta)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}I_{c\theta}\dot{\theta}^2$$

De la expresión de $\ddot{\theta}$ se puede ver que, al introducir un volante de momento de inercia importante respecto a las inercias reducidas $I_m(\theta)$ y $I_c(\theta)$, se disminuye la aceleración angular $\ddot{\theta}$; por tanto, la fluctuación de velocidad angular disminuye y, en consecuencia, lo hace el grado de irregularidad.

Al disminuir la aceleración angular $\ddot{\theta}$, el par Γ_1 que el motor hace sobre el volante tiende a igualarse al par motor Γ_m y el de la derecha Γ_2 al par resistente de la carga Γ_c . Se ha de observar que Γ_1 no tiende a igualarse con Γ_2 ya que, si bien $\ddot{\theta}$ es pequeño, el momento de inercia I_v es grande y, por lo tanto, el producto de los dos no se despreciable. Aunque el par motor Γ_m sea fluctuante, como por ejemplo en un motor alternativo, el par que recibe la carga Γ_c lo es sólo en función de la aceleración $\ddot{\theta}$ del eje. El caso contrario se puede presentar en una prensa donde el par resistente Γ_c presenta fluctuaciones muy importantes y, en cambio, puede ser accionada por un motor de par Γ_m sensiblemente constante si se consigue una aceleración angular pequeña.

Directamente del teorema de la energía se puede razonar la necesidad de un volante e, incluso, hacer un cálculo estimativo sencillo de la inercia requerida. Este razonamiento se basa en el hecho que, al ser $\Delta E_c = \Sigma W$, si la inercia es grande se pueden presentar fluctuaciones de energía importantes, ya sea a causa del motor o de la carga, sin que la variación de la velocidad tenga que ser grande.

Ejemplo 9.6 Como ejemplo, se plantea el cálculo del momento de inercia estimado para el volante de una punzonadora. Su eje ha de girar a una velocidad mediana de n vueltas por segundo, con un grado de irregularidad no superior a δ . Realiza una operación por vuelta que dura una determinada fracción de vuelta y que requiere una energía E_d . Como se ha visto, para al cálculo del grado de irregularidad la variación máxima de energía se aproxima mediante $m \omega_{\text{mediana}}^2 \delta$ (Ec. 9.7), de manera que

$$m = \frac{E_d}{(2\pi n)^2 \delta}$$

es aproximadamente la inercia reducida a la rotación del eje adecuada para los elementos móviles de la máquina. A partir de esta inercia, se puede calcular el momento de inercia del volante simplemente por diferencia con la inercia reducida mediana del resto de la cadena cinemática, que en cálculos conservadores a veces se desprecia.

9.8 Curvas características velocidad-fuerza de las máquinas

En los sistemas de un grado de libertad, sean motores o máquinas conducidas, sus parámetros dinámicos se pueden caracterizar, como se ha visto, por la inercia y la fuerza reducidas a una coordenada. Frecuentemente la inercia reducida es sensiblemente constante y la fuerza reducida sólo es función de la velocidad; en algunas ocasiones esta función de la velocidad depende de un

parámetro de control. Este es el caso, por ejemplo, de un motor eléctrico, en el que la inercia reducida al eje es constante y el par motor es función de la velocidad, fijada la tensión de alimentación.

En la figura 9.8 se representa, para un motor eléctrico, la relación entre la velocidad angular y el par utilizando la tensión como parámetro. Las curvas que se obtienen son las curvas características velocidad-par motor.

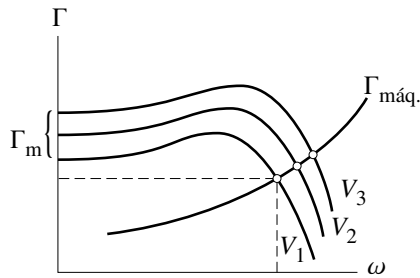


Fig. 9.8 Ejemplos de curvas características

Para una máquina conducida, la curva característica velocidad-par viene dada por el par necesario para accionar la máquina en régimen estacionario – aceleración despreciable. Este par, conocido como *par resistente*, es del mismo módulo y sentido opuesto al par reducido de todas las fuerzas y los momentos que se oponen al movimiento de la máquina.

Si en el mismo gráfico (Fig. 9.8) se dibujan el par motor y el par resistente, es evidente que los puntos de intersección de ambos pares –que se pueden determinar analíticamente si se conocen las funciones analíticas–

corresponden a régimen estacionario ya que, al igualarse los dos pares, la aceleración es nula. En este gráfico se manifiesta cómo se modifica la velocidad al variar el parámetro de control; en este caso, la tensión de alimentación del motor.

También se puede observar que el funcionamiento del volante a estas velocidades es estable; si por alguna razón la velocidad disminuye, el par motor será más grande que el par resistente, de manera que la máquina se volverá a acelerar. Si por alguna razón la máquina se acelera, el par resistente será más grande que el par motor y la máquina se frenará.

La intersección de las curvas características del motor y de la máquina podría ser como la que se representa al punto B de la figura 9.9. En este caso, la velocidad sería inestable: si la velocidad de la máquina disminuye por debajo de ésta, la máquina acabará parándose y, si aumenta, lo hará hasta el punto A.

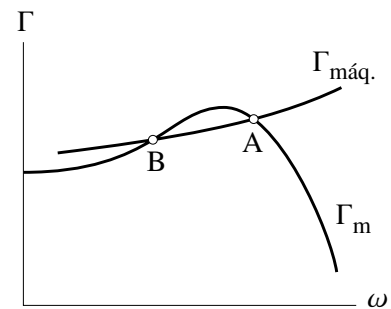


Fig. 9.9 Intersección inestable (punto B) de una curva característica de un motor y de una máquina

Las curvas características se han presentado utilizando ejemplos del caso más usual, en que el movimiento es de rotación. No se han de olvidar, las situaciones con movimiento de translación, como es el caso de los cilindros hidráulicos, que hacen una fuerza función de la velocidad que depende de la apertura de la válvula de comando.

Problemas

P9-1 En una máquina, se necesita una potencia en el eje de entrada $P_{\text{máq.}} = 2 \text{ kW}$ y una velocidad de rotación $n_{\text{máq.}} = 100 \text{ min}^{-1}$. Se dispone de un motor que gira a $n_{\text{mot.}} = 750 \text{ min}^{-1}$ y de un reductor de rendimiento $\eta = 0,8$. Determinar:

- La potencia y el par motor.
- El par en el eje de entrada de la máquina.

P9-2 Una máquina es accionada por un motor a través de un reductor. El motor gira a $n_{\text{mot.}} = 3000 \text{ min}^{-1}$ y suministra una potencia $P_{\text{mot.}} = 1 \text{ kW}$. El rendimiento del reductor es $\eta = 0,8$ y la relación de reducción es $i = 10$. Determinar la potencia y el par en el eje de entrada de la máquina.

P9-3 La inercia de una máquina reducida a la rotación del eje de entrada es $I = 5 \text{ kg m}^2$. Las resistencias pasivas reducidas en esta rotación equivalen a un par resistente $\Gamma_{\text{rp}} = 5 \text{ N m}$. En el momento de acelerar, el motor suministra a la máquina un par $\Gamma_{\text{m}} = 20 \text{ N m}$. Determinar:

- La aceleración del eje de entrada.
Una vez conseguida la velocidad de régimen $n = 1200 \text{ min}^{-1}$ el motor pasa a suministrar el par necesario para mantenerla. En estas condiciones determinar:
- La potencia del motor.

P9-4 Un vehículo con una determinada marcha tiene una relación de transmisión $\tau = 0,2$ entre el eje del motor y el eje de las ruedas, que son de diámetro $d = 0,6 \text{ m}$. El rendimiento de la transmisión –caja de cambios, diferencial, etc.– es $\eta = 0,75$. En un cierto instante, el motor gira a $n_{\text{mot.}} = 3000 \text{ min}^{-1}$ y genera un par $\Gamma_{\text{m}} = 100 \text{ N m}$. Determinar:

- El par al eje de las ruedas.
- Las resistencias pasivas diferentes de las de la transmisión, reducidas a la velocidad de avance si ésta es constante y el vehículo se mueve en terreno horizontal.

P9-5 En un automóvil de cuatro marchas, las relaciones de transmisión para cada marcha $\tau = \omega_{\text{secundario}}/\omega_{\text{primario}}$ son: $\tau_1 = 11/42$, $\tau_2 = 16/37$, $\tau_3 = 22/31$, $\tau_4 = 26/27$. El eje secundario actúa sobre los ejes de las ruedas (paliers) a través de un engranaje cónico de relación de transmisión $\tau_c = 12/37$ y un diferencial. El diámetro de las ruedas es $d_r = 600 \text{ mm}$.

Las características inerciales del vehículo son:

- Masa total: $m_t = 800 \text{ kg}$
- Momento de inercia axial de cada rueda: $I_r = 0,36 \text{ kg m}^2$
- Momento de inercia del eje primario: $I_1 = 0,025 \text{ kg m}^2$
- Momento de inercia del eje secundario: $I_2 = 0,025 \text{ kg m}^2$
- Momento de inercia del diferencial + paliers: $I_3 = 0,025 \text{ kg m}^2$

Nota: I_1 incluye la inercia reducida de las ruedas dentadas del secundario que están permanentemente engranadas con las del primario.

Determinar, para cada marcha:

- La inercia del vehículo reducida a la rotación del motor.
- La aceleración del vehículo en una subida del 2% si el par motor es $\Gamma_{\text{m}} = 100 \text{ N m}$ y las resistencias pasivas son despreciables.

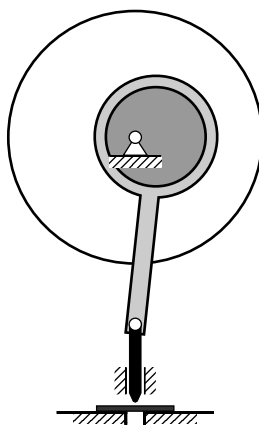
P 9-6 Un motor acciona, a través de un reductor de relación de reducción $i = 3$, una máquina que necesita en el eje de entrada un par $\Gamma_{\text{máq.}} = 100 \text{ N m}$ a $n_{\text{máq.}} = 500 \text{ min}^{-1}$. El rendimiento electromecánico del motor es $\eta_{\text{mot.}} = 0,9$ y el del reductor es $\eta_{\text{red.}} = 0,8$. Determinar:

- La velocidad angular y el par al eje del motor.
- La potencia eléctrica necesaria.
- Las resistencias pasivas del reductor reducidas a la rotación del eje motor.

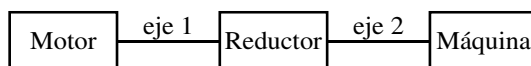
P 9-7 Un compresor alternativo ha de proporcionar diariamente 10 m^3 de aire comprimido a 8 bar. Determinar:

- El consumo eléctrico diario, en las hipótesis siguientes:
 - Compresión politrópica ($p v^{1,1} = \text{constante}$) del aire a partir de las condiciones atmosféricas (tomar $p_{\text{atmosférica}} = 1 \text{ bar}$)
 - Rendimiento electromecánico del motor eléctrico de accionamiento $\eta_{\text{mot.}} = 0,9$
 - Rendimiento mecánico del compresor $\eta_{\text{comp.}} = 0,8$
- Si se utiliza un motor de 1 kW y 1500 min^{-1} , ¿qué volante necesitará para garantizar un grado de irregularidad de un 1%?

P 9-8 Una punzonadora ha de realizar 5 operaciones por segundo y cada operación de punzonado requiere 80 J . Determinar el momento de inercia del volante para garantizar un grado de irregularidad inferior al 2%. Cuando la máquina funciona en régimen estacionario con este volante se desconecta el motor; ¿cuántas operaciones hará y cuánto tardará en pararse?



- P 9-9** Un motor eléctrico acciona, a través de un reductor de relación de transmisión $\tau = 0,16$, una máquina que gira a $n_{\text{máq.}} = 120 \text{ min}^{-1}$ y en cada vuelta realiza una operación de trabajo que requiere una energía $E_{\text{op.}} = 2 \text{ kJ}$ concentrada en una pequeña fracción del ciclo.



$$\begin{array}{llll}
 \eta_{\text{mot.}} = 0,8 & \eta_{\text{red.}} = 0,7 & \Gamma_{\text{rp}} = 50 \text{ N m} & E_{\text{op.}} = 2 \text{ kJ} \\
 I_{\text{mot.}} = 1 \text{ kg m}^2 & I_{\text{red.}} = 3 \text{ kg m}^2 & I_{\text{máq.}} = 50 \text{ kg m}^2 & \\
 & \tau = 0,16 & n_{\text{máq.}} = 120 \text{ min}^{-1} &
 \end{array}$$

Los elementos de la cadena motor-reductor-máquina tienen las características siguientes:

Motor	Rendimiento electromecánico	$\eta_{\text{mot.}} = 0,8$
	Inercia reducida al eje 1	$I_{\text{mot.}} = 1 \text{ kg m}^2$
Reductor	Rendimiento	$\eta_{\text{red.}} = 0,7$
	Inercia reducida al eje 1	$I_{\text{red.}} = 3 \text{ kg m}^2$
Máquina	Inercia reducida al eje 2	$I_{\text{máq.}} = 50 \text{ kg m}^2$
	Resistencias pasivas reducidas al eje 2	
	(Independientes de la velocidad y de la carga)	$\Gamma_{\text{rp}} = 50 \text{ N m}$

Determinar:

- La potencia eléctrica mediana que el motor consume.
- La potencia media disipada en el reductor y sus resistencias pasivas reducidas al eje 1 para la velocidad nominal.
- La inercia total reducida al eje 1 y una estimación del grado de irregularidad.
- El momento de inercia de un volante en el eje 2 que reduzca el grado de irregularidad a 0,03. Razonar las ventajas y los inconvenientes de colocarlo en uno u otro eje.
La máquina no realiza trabajo en los transitorios de puesta en marcha ni parada y finalmente se ha equipado con un volante en el eje 1, de momento axial de inercia $I_v = 5 \text{ kg m}^2$.
- ¿Cuál es la aceleración del eje motor si en un cierto instante este ejerce un par $\Gamma_m = 60 \text{ N m}$ y las resistencias pasivas del reductor continúan siendo las calculadas en el apartado b ?

- P 9-10** Un motor eléctrico de corriente continua alimentado a tensión constante suministra un par linealmente decreciente con la velocidad de giro $\Gamma = \Gamma_0(1 - \omega/\omega_{\text{máx.}})$ y su rendimiento electromecánico crece linealmente con la velocidad de giro, $\eta = \omega/\omega_{\text{máx.}}$.

$$\Gamma_0 = 0,1 \text{ N m}; I = 10^{-3} \text{ kg m}^2; \omega_{\text{máx.}} = 6000 \pi \text{ rad/s}$$

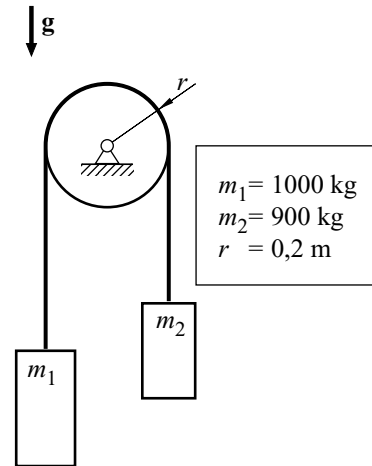
- Determinar la potencia mecánica suministrada y la potencia eléctrica consumida función de la velocidad de giro.

Se quiere utilizar un motor de estas características para acelerar un volante de momento de inercia I . Si las resistencias pasivas se consideran despreciables:

- Determinar la velocidad angular y la energía eléctrica consumida en función del tiempo.

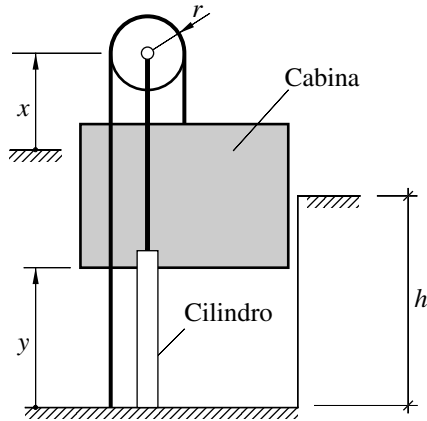
P9-11 Con tal de tener maniobras suaves en el elevador de la figura, se impone en las arrancadas y paradas una aceleración $a = 6 v_{\text{máx.}} (\lambda - \lambda^2) / t_0$ para $0 < \lambda \leq 1$, con $v_{\text{máx.}} = 2 \text{ m/s}$, $t_0 = 3 \text{ s}$ y $\lambda = t / t_0$. Se consideran despreciables la inercia del cable y la de las poleas, así como las resistencias pasivas. El desplazamiento vertical de una maniobra es de 10 m. Determinar:

- Las curvas de aceleración, velocidad y desplazamiento.
- El par motor y la potencia necesarios.
- La energía consumida en una maniobra.



P9-12 Un elevador hace diariamente 500 maniobras levantando una carga de 1800 kg – tara = 1000 kg, carga útil = 800 kg– a una altura de 10 m y bajando en vacío. El contrapeso es de 1400 kg. El arranque y la frenada se hacen con aceleración constante d’1 m/s² durante 2 s. Si se consideran despreciables las resistencias pasivas, como también las inercias no citadas, ¿cual es la energía consumida diariamente?

P9-13 El ascensor de la figura, accionado mediante el cilindro hidráulico que desplaza el eje de la polea de radio $r = 0,2 \text{ m}$ tiene un recorrido vertical $h = 8 \text{ m}$ y sus inercias son:



- Masa de la cabina con carga $m_c = 1000 \text{ kg}$
- Masa de la polea y de la varilla $m_p = 300 \text{ kg}$
- Momento de inercia de la polea $I_p = 2 \text{ kg m}^2$
- Cable de inercia despreciable

El arranque y la frenada se hacen con una aceleración constante $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ durante 2 s. El rendimiento del cilindro es $\eta_{\text{ch}} = 1 - 0,2 v^2$, siendo v la velocidad de la varilla respecto al cilindro, y el rendimiento global del grupo hidráulico que genera la presión de alimentación del cilindro es $\eta_{\text{gh}} = 0,7$. Si las resistencias pasivas en los pares cinemáticos son despreciables y el cable no se desplaza respecto de la polea, determinar:

- El tiempo total de una maniobra de subida.
- La inercia de todo el ascensor, reducida al movimiento de la varilla del cilindro hidráulico.
- La fuerza del cilindro en el tramo de aceleración de una maniobra de subida.
- La energía consumida en el tramo de velocidad constante de una maniobra de subida.

P9-14 Un vehículo tiene las características siguientes: masa total, $m = 1200$ kg; Radio de las ruedas, $r_r = 0,3$ m; momento de inercia axial de las ruedas, $I = 1$ kg m² (por rueda). Para la marcha escogida: relación de transmisión, $\omega_{ruedas}/\omega = 0,2$; momento de inercia reducido a la rotación del motor de sus partes móviles y de la transmisión, $I_t = 0,5$ kg m².

La potencia del motor para una posición del acelerador función de la velocidad angular ω del motor cuando ésta se encuentra entre 100 rad/s y 500 rad/s se puede aproximar por $P = 80 (u + 0,5 u^2 - 0,5 u^3)$ kW con $u = \omega/\omega_0$ y $\omega_0 = 500$ rad/s.

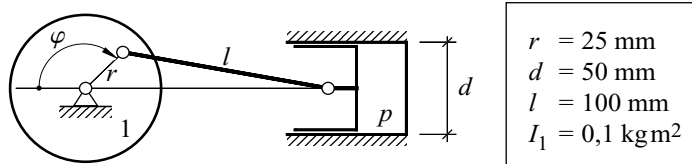
Al avanzar por un terreno horizontal las resistencias pasivas son: $F = 500 + c v^2$ N con $c = 4$ N/(m/s)² y v velocidad en m/s. Determinar:

- a) La curva de par motor función de su velocidad angular.
- b) La velocidad máxima en dichas condiciones.
- c) El tiempo que tarda en pasar de 9 m/s a 24 m/s.
- d) La energía disipada en el proceso del apartado anterior.

P9-15 En un compresor, cuando la frecuencia de giro del cigüeñal es de 50 Hz, la presión en el interior del cilindro (medida experimentalmente) es

$$p(\varphi) = (4 + 6 \cos(\varphi + 3,75) + \cos(2\varphi + 1,5)) 10^5 \text{ Pa}$$

- a) Si las resistencias pasivas son despreciables, determinar la potencia media del motor.
- b) Si el motor suministra una potencia constante –a lo largo de un ciclo–, determinar la velocidad angular lo largo de un ciclo.

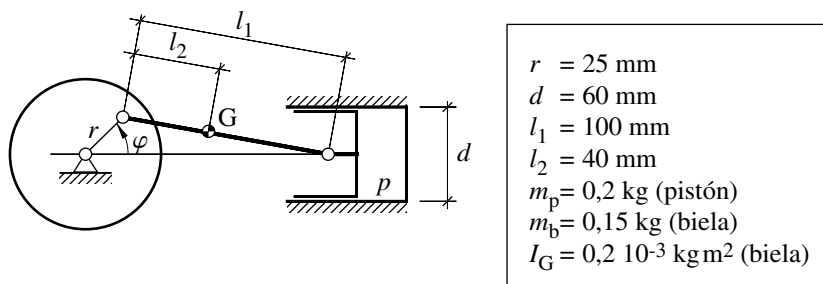


P9-16 En un motor monocilíndrico de 4 tiempos, la presión en el interior del cilindro se puede aproximar, cuando gira a 50 Hz, por la expresión:

$$p(\varphi) = 10^7 (1,05 e^{-\varphi} - e^{-2\varphi}) + e^{\varphi} \quad 0 \leq \varphi \leq 4\pi$$

Determinar, despreciando las resistencias pasivas:

- a) La potencia mediana y el par medio del motor.
- b) El par en el eje del motor a causa de la presión de los gases.
- c) La inercia de un volante que, colocado en el eje del motor, garantice un grado de irregularidad inferior a un 1%.
- d) La ecuación del movimiento si sobre el eje actúa un par resistente igual al par medio del motor y se ha colocado un volante de momento de inercia I .



- P 9-17** En un motor de corriente continua con excitación independiente, el par Γ_m en el eje y su velocidad angular ω están relacionados en primera aproximación por la expresión:

$$\Gamma_m = \frac{cV}{R} - \frac{c^2\omega}{R}, \text{ donde}$$

c (N m/A) es función del campo magnético y otras características constructivas,

V es la tensión de alimentación,

R es la resistencia del circuito del inducido y

la intensidad de alimentación –considerando sólo la del inducido– es $I = (V - c\omega)/R$.

Para accionar un pequeño taladro se utiliza un motor que tiene las características siguientes: $c = 0,02$ N m/A, $V = 12$ V, $R = 2$ Ω . La inercia reducida de la máquina en rotación del motor es $I_r = 0,2 \cdot 10^{-3}$ kg m² y sus resistencias pasivas reducidas también en rotación de este eje se evalúan en $M_R = 20 + 0,05 \omega$ N m.

Si se conecta el taladro en vacío, determinar:

- La velocidad de régimen estacionario sin carga, ω_0 .
- El tiempo que tarda en llegar a $0,8 \omega_{\text{máx}}$.
- La energía consumida y la energía disipada –en el circuito eléctrico y en las resistencias pasivas mecánicas– hasta llegar a $0,8 \omega_{\text{máx}}$.
- Si el taladro gira con velocidad angular constante, determinar, en función de ésta, la potencia eléctrica consumida, la potencia mecánica aprovechada y el rendimiento.

- P 9-18** El par motor de un motor de corriente continua se puede aproximar mediante la expresión:

$$\Gamma_m = c(V - c\omega)/R, \text{ donde}$$

V (tensión de alimentación) = 1200 V

R (resistencia del inducido) = 2 Ω

c (factor proporcional al campo magnético de excitación) = 4 V/(rad/s)

ω (velocidad angular del eje)

$(V - c\omega)/R$ (intensidad de alimentación del inducido)

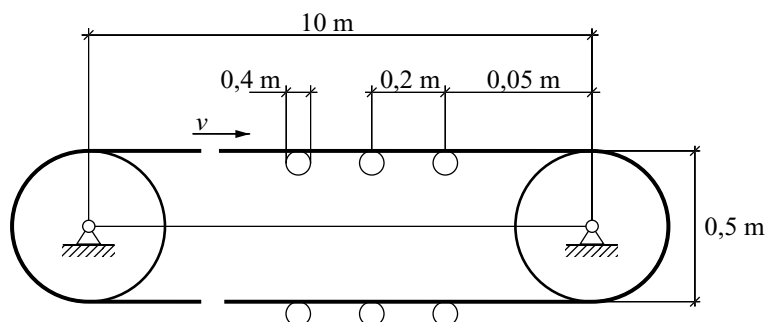
Determinar:

- La curva de par motor, Γ_m , y la potencia suministrada, P_{mec} , en función de ω .
- La velocidad angular máxima, $\omega_{\text{máx}}$, a que puede llegar el motor. La potencia máxima, $P_{\text{máx}}$, que puede suministrar el motor y la velocidad angular a la que ésta se produce.
- El rendimiento $\eta = P_{\text{mec}}/P_{\text{consumida}}$ en función de ω .

Si la carga del motor es equivalente a una inercia reducida en su eje $I_{\text{red}} = 100$ kg m² y las resistencias pasivas son despreciables, determinar:

- El tiempo necesario para pasar del reposo a $0,8 \omega_{\text{máx}}$.
- La energía consumida y la energía disipada en el proceso de arranque anterior.

- P9-19** Uno de los tambores de la cinta transportadora de la figura es accionado por un motor de corriente alterna a través de un reductor de relación de transmisión $\tau = 0,01$.



Las características inerciales de los diferentes elementos son:

- Banda: $\rho_b = 5 \text{ km/m}$ (densidad lineal)
 Rodillos: $I_c = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ (momento de inercia respecto al eje de giro)
 Tambores: $I_t = 0,5 \text{ kg m}^2$ (momento de inercia respecto al eje de giro)
 Reductor + motor: $I_r = 0,6 \text{ kg m}^2$ (inercia reducida a la rotación del eje del motor)

El par motor Γ_m función de la velocidad angular de giro ω viene dado por la expresión:

$$\Gamma_m = \frac{\Gamma_1 s \operatorname{sgn}(\omega_0)}{s^2 + s_c^2 + k_1 |s|}, \quad \text{donde } s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \quad (\text{deslizamiento})$$

con $\omega_0 = 50 \pi \text{ rad/s}$; $s_c = 0,2$; $k_1 = 0,4$ y $\Gamma_1 = 10 \text{ Nm}$

Las resistencias pasivas del conjunto, reducidas a la rotación del eje del motor, se evalúan según la expresión $\Gamma_R = \Gamma_2(1 + k_2 |\omega|)$, con $\Gamma_2 = 2 \text{ N m}$ y $k_2 = 10^{-2} \text{ s}$

Si no hay deslizamiento en ningún contacto, determinar:

- La velocidad máxima $v_{\text{máx.}}$ a que puede llegar la cinta transportadora.
- El tiempo que tarda en pasar del reposo a $0,9 v_{\text{máx.}}$
- La energía mecánica disipada al pasar del reposo a $0,9 v_{\text{máx.}}$
- El rendimiento mecánico cuando el motor gira a $0,8 \omega_0$.
- El tiempo en la maniobra de frenada desde $v_{\text{máx.}}$ hasta el reposo si se realiza:
 - desconectando el motor
 - invirtiendo la polaridad del motor ($\omega_0 \rightarrow -\omega_0$)

Resultados de los problemas

Capítulo 2

- P 2-1** b) 1 grado de libertad.
 c) $x^2 + y^2 = l^2$; $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$
- P 2-2** b) $\begin{cases} r \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 = 0 \\ r \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 - x = 0 \end{cases}$
 d) Para φ_1 no existen puntos muertos.
 $\varphi_2 = \pm 30^\circ$
 $x = 1 \text{ m i } x = 3 \text{ m}$
- P 2-3** a) 2 grados de libertad.
 b) Ecuación de enlace geométrica: $y_1 + y_3 - 2y_2 = 0$
- P 2-4** a) 3 grados de libertad.
 b) $\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + s - x_0 = 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 - y_0 = 0 \end{cases}$
- P 2-5** a) 4 grados de libertad.
- P 2-6** Con una biela, $\{\varphi_1 = n\pi, \varphi_2 = m\pi \forall n, m \in \mathbb{Z}\}$ son bifurcaciones.
 Con dos bielas, hay redundancia.
- P 2-7**
- P 2-8** a) 2 grados de libertad.
 b) $x = 48 + (\rho_1 - \rho_2) / 2$ en milímetros
 $\frac{h}{2} = \sqrt{99 - 15(\rho_1 + \rho_2) - \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)^2} - 6$ en milímetros
- P 2-9** b) $\varphi_2 = 2 \varphi_1$

- P 2-10** a) $4-3(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + 2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$
 b) $\begin{cases} \varphi_1 = 38,94^\circ \\ \varphi_2 = 70,53^\circ \end{cases}, \begin{cases} \varphi_1 = -38,94^\circ \\ \varphi_2 = -70,53^\circ \end{cases}$ son puntos muertos para φ_2 . Los puntos muertos para φ_1 corresponden a los ángulos cambiados.
 c) $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ es una bifurcación.
- P 2-11**
- P 2-12** a) 3 grados de libertad.
- P 2-13** a) 2 grados de libertad.
 b) $x = 900 - 3\rho_2$; $y = 4\rho_1$ en milímetros
- P 2-14** a) 5 grados de libertad.
 b) 2 grados de libertad.

Capítulo 3

- P 3-1** $\phi_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \cos \varphi_1 \\ 1 & 0 & \sin \varphi_1 - \frac{3}{2} \frac{2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{(12 + 4 \sin \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1)^{1/2}} \end{bmatrix}$
- P 3-2** a) $\phi_q = \begin{bmatrix} 2(x - \rho_1) & 2y & -2(x - \rho_1) & 0 \\ 2x & 2(y - \rho_2) & 0 & -2(y - \rho_2) \end{bmatrix}$
 c) Segmento de (5, 4,5) a (3,376, 3,688) en metros
- P 3-3** a) $\dot{y} = -\frac{dr \sin \varphi}{y} \dot{\varphi}$
 Para $l = 4$, $y = \sqrt{7}$; $y = \sqrt{15}$ son puntos muertos para y .
 b) Para $l = 3$, $\begin{cases} y = 2\sqrt{2} \\ y = 0, \alpha = n\pi \end{cases}$ son puntos muertos para y .
 Para $l = 2$, $\begin{cases} y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ son puntos muertos para y .
 $\varphi = 75,5^\circ$; $\varphi = -75,5^\circ$ son puntos muertos para φ .
- P 3-4** a) $\begin{bmatrix} -r \cos \varphi_1 & l \cos \varphi_2 - x \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_1 & -l \sin \varphi_2 - x \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \end{bmatrix}$
 c) $\begin{cases} x = 54,54 \text{ mm} \\ x = 23,98 \text{ mm} \end{cases}; \dot{x} = \dot{\varphi}_1 r$
 d) $\begin{cases} \varphi_2 = 62,73^\circ \\ \varphi_2 = 32,23^\circ \end{cases}; \dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_1 / 3$
 $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 / 5$

- P 3-5** a) $\dot{\varphi}_2 = 0$; $\dot{s} = -l_1 \dot{\varphi}_1$
 b) $\phi_q = \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi_1 & l_3 \cos \varphi_2 & 0 \\ -l_1 \sin \varphi_1 & -l_3 \sin \varphi_2 & -1 \end{bmatrix}$
 c) Punto muerto para $\varphi_2 = 0$, $\dot{s} = -\dot{\varphi}_1 l_1$
 Punto muerto para $s = 0,283 \text{ mm}$, $\dot{\varphi}_2 = -\frac{l_1}{l_3} \dot{\varphi}_1$

P 3-6

- P 3-7** b) $v_{\text{desl.}} = \frac{d}{dt} |\overline{\mathbf{EP}}| = 40\omega \text{ mm/s}$
 $a_{\text{desl.}} = \frac{d^2}{dt^2} |\overline{\mathbf{EP}}| = -40\omega^2 \text{ mm/s}^2$

- P 3-8** $\omega^{s2} = -0,25 \text{ rad/s}$; $\omega^{s3} = 0,25 \text{ rad/s}$; $\omega^{s4} = 0,25 \text{ rad/s}$; $\omega^{s5} = 0,25 \text{ rad/s}$
 $\alpha^{s2} = -0,0625 \text{ rad/s}^2$; $\alpha^{s3} = -0,125 \text{ rad/s}^2$; $\alpha^{s4} = -0,25 \text{ rad/s}^2$; $\alpha^{s5} = 0,1875 \text{ rad/s}^2$

- P 3-9** $\omega^{s2} = 2 \text{ rad/s}$; $\omega^{s3} = -0,5 \text{ rad/s}$; $\omega^{s4} = 0,5 \text{ rad/s}$; $v_{\text{desl.}}(\text{F}) = -10 \text{ mm/s}$;
 $\alpha^{s2} = 3 \text{ rad/s}^2$; $\alpha^{s3} = -0,5 \text{ rad/s}^2$; $\alpha^{s4} = 0,833 \text{ rad/s}^2$; $a_{\text{desl.}}(\text{F}) = 39,17 \text{ mm/s}^2$;

- P 3-10** $\left. \begin{matrix} \omega^{s2} \\ \omega^{s3} \\ \omega^{s4} \\ \omega^{s5} \\ v_{\text{desl.}}(\text{D}) \\ v_{\text{desl.}}(\text{G}) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -0,1515 \text{ rad/s} \\ 0,1818 \text{ rad/s} \\ -0,1818 \text{ rad/s} \\ -0,2727 \text{ rad/s} \\ 2,7272 \text{ mm/s} \\ 4,0909 \text{ mm/s} \end{matrix} \right\}$; $\left. \begin{matrix} \alpha^{s2} \\ \alpha^{s3} \\ \alpha^{s4} \\ \alpha^{s5} \\ a_{\text{desl.}}(\text{D}) \\ a_{\text{desl.}}(\text{G}) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -0,2438 \text{ rad/s}^2 \\ -0,0546 \text{ rad/s}^2 \\ 0,0215 \text{ rad/s}^2 \\ 0,0359 \text{ rad/s}^2 \\ 0,1729 \text{ mm/s}^2 \\ 1,5299 \text{ mm/s}^2 \end{matrix} \right\}$

- P 3-11** a) $\begin{bmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 & -d_1 \sin \varphi_2 & l_3 \sin \varphi_3 & 0 & \cos \varphi_2 \\ l_1 \cos \varphi_1 & d_1 \cos \varphi_2 & -l_3 \cos \varphi_3 & 0 & \sin \varphi_2 \\ -l_1 \sin \varphi_1 & -l_2 \sin \varphi_2 & 0 & b \cos \varphi_4 & 0 \end{bmatrix}$
 b) $\rho = 2(b \cos \varphi_4 - e \sin \varphi_4)$
 $h = y_0 + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$
 d) $\left. \begin{matrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_4 \\ \dot{d}_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0,18 \text{ rad/s} \\ 0,34 \text{ rad/s} \\ -9,192 \text{ mm/s} \end{matrix} \right\}$; $\left. \begin{matrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_4 \\ \ddot{d}_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -0,3673 \text{ rad/s}^2 \\ 0,2587 \text{ rad/s}^2 \\ 5,724 \text{ mm/s}^2 \end{matrix} \right\}$

P 3-12 $s=l$ recta; $s \neq 0$ ellipse; $s=0$ circunferencia

- P 3-13** a) $\dot{\varphi}_2 = \frac{r(s \cos \varphi_1 - r) \cos^2 \varphi_2}{s^2 + r^2 - 2sr \cos \varphi_1} \dot{\varphi}_1 = \frac{r \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{(s^2 + r^2 - 2sr \cos \varphi_1)^{1/2}} \dot{\varphi}_1$
 b) $v_{\text{desl.}} = \sin(\varphi_1 + \varphi_2) r \dot{\varphi}_1$

Capítulo 4

- P 4-1** a) $d(\varphi) = 10(-2u^3 + 3u^2)$ mm con $u = \varphi/60$
 b) $d(\varphi) = 10(6u^5 - 15u^4 + 10u^3)$ mm
 c) $d(\varphi) = 5(1 - \cos(\pi u))$ mm. Continuidad C^1
- P 4-2** $C^1 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{3}(8u^3 - 12u^2 + u + 3)$, amb $u = \left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) / \frac{\pi}{2}$
 $C^2 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{3}(-24u^5 + 60u^4 - 40u^3 + u + 3)$
- P 4-3** $C^1 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{8}(-2u^2 + 2u + 7)$, con $u = \left(\varphi - \frac{7\pi}{8}\right) / \frac{\pi}{4}$ (tramo superior)
 $C^1 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{8}(2u^2 - 2u + 1)$, con $u = \left(\varphi - \frac{15\pi}{8}\right) / \frac{\pi}{4}$ (tramo inferior)
 $C^2 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{8}(2u^4 - 4u^3 + 2u + 7)$
 $C^2 \rightarrow d(\varphi) = \frac{a}{8}(-2u^4 + 4u^3 - 2u + 1)$
- P 4-4** Para $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, $d(\varphi) = a(-2u^3 + 3u^2)$, con $u = \varphi / \frac{3\pi}{2}$
 Para $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$, $d(\varphi) = a(2u^3 - 3u^2 + 1)$, con $u = \left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) / \frac{\pi}{2}$
- P 4-5** $r_0 = 30$ mm ; $\{\overline{\mathbf{OC}}\}_{xy} = \begin{Bmatrix} a \sin^2 \varphi + a_0 \sin \varphi \\ a \sin \varphi \cos \varphi + a_0 \cos \varphi \end{Bmatrix}_{xy}$
- P 4-6** $r_0 = 25$ mm
 $\{\overline{\mathbf{OJ}}\}_{xy} = \begin{Bmatrix} a + a_0 \sin \varphi \\ a_0 \cos \varphi \end{Bmatrix}_{xy}$
 Excéntrica de centro sobre el eje x, radio a_0 y excentricidad a
- P 4-7** $\{\overline{\mathbf{OJ}}\}_{xy} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d' \\ d \end{Bmatrix}$; $r_c = d + d''$ con $\begin{cases} d'' = \frac{100}{\pi}(2u - 6u^2 + 4u^3) \\ d'' = \frac{50}{\pi^2}(2 - 12u + 12u^2) \end{cases}$
- P 4-8** $\{\overline{\mathbf{OC}}\}_{xy} = \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} d(\varphi)$, $r_c = \frac{(d^2 + d'^2)^{3/2}}{2d'^2 - d'd + d^2}$
 $r_c = r_{cp} - r$, con $\begin{cases} d' = 10 \sin 2\varphi \\ d'' = 20 \cos 2\varphi \end{cases}$

P 4-9 a) $\dot{s}_2 = 3\dot{s}_1 / 4$; $\ddot{s}_2 = 3\ddot{s}_1 / 4 - 25\dot{s}_1^2 / 64d$
 b) $v_{\text{desl.}} = 5\dot{s}_1 / 4$
 c) $s_1^2 + s_2^2 - 10d s_1 = 0$

P 4-10 a) $\dot{\varphi} = \dot{s} / 4d$; $\ddot{\varphi} = \ddot{s} / 4d - \dot{s}^2 / 256d^2$
 b) $v_{\text{desl.}} = 3\dot{s} / 8$
 c) $(31,25 + (s/d)^2) / 8,062 + (s/d) \cos \varphi - 4 \sin \varphi = 0$

P 4-11 b) $\omega^{s4} = 13,33 \text{ rad/s}$; $\omega^{s5} = 20 \text{ rad/s}$

P 4-12 $v(u) = b_2 B_2^3(u) + b_3 B_3^3(u) = 45u^2 - 30u^3 \text{ m/s}$ con $u = t / 15$; $a_{\text{máx.}} = 1,5 \text{ m/s}^2$

P 4-13 $a_{\text{máx.}} = -37,5 \text{ m/s}^2$

P 4-14 a) $v(u) = 0,8(B_2^3(u) + B_3^3(u)) \text{ m/s}$ con $u = t / \Delta t$
 $a(u) = 3 \cdot 0,8 \cdot B_1^2(u) \dot{u} \text{ m/s}^2$
 $d(u) = \frac{1}{\dot{u}} \frac{1}{4} (0,8 \cdot B_3^4(u) + 1,6 \cdot B_4^4(u)) \text{ m}$
 b) $\Delta t = 2 \text{ s}$

Capítulo 5

P 5-1 a) $\tau = 60$ b) $\tau = -1/180$ c) $\tau = 25$

P 5-2 a) $z_1 = 63$ $z_2 = 21$ $z_3 = 72$ $z_4 = 12$
 $z_1 = 54$ $z_2 = 14$ $z_3 = 56$ $z_4 = 12$
 $z_1 = 72$ $z_2 = 13$ $z_3 = 65$ $z_4 = 20$
 $z_1 = 65$ $z_2 = 20$ $z_3 = 72$ $z_4 = 13$
 b) $z_1 = 70$ $z_2 = 14$ $z_3 = 69$ $z_4 = 15$
 $z_1 = 69$ $z_2 = 19$ $z_3 = 76$ $z_4 = 12$

P 5-3 a) $z_1 = 19$ $z_2 = 20$ $z_3 = 28$ $z_4 = 20$
 b) $z_1 = 37$ $z_2 = 20$ $z_3 = 53$ $z_4 = 50$
 c) $z_1 = 78$ $z_2 = 25$
 d) $z_1 = 163$ $z_2 = 100$
 $z_1 = 26$ $z_2 = 16$ error = 0,3 %

P 5-4 $z_1 = 35$ $z_2 = 86$ error = 1,75%
 $z_1 = 45$ $z_2 = 76$ error = -1,3%
 $z_1 = 57$ $z_2 = 64$ error = -1%
 $z_1 = 70$ $z_2 = 51$ error = 1,7%
 $z_1 = 81$ $z_2 = 40$ error = 0%

P 5-5

	$\omega_b = 0$	$\omega_1 = 0$	$\omega_2 = 0$
a)	$\omega_1/\omega_2 = -2$	$\omega_2/\omega_b = 1,5$	$\omega_1/\omega_b = 3$
b)	$\omega_1/\omega_2 = 1,8$	$\omega_2/\omega_b = 4/9$	$\omega_1/\omega_b = -0,8$
c)	$\omega_1/\omega_2 = -1,5$	$\omega_2/\omega_b = 5/3$	$\omega_1/\omega_b = 2,5$
d)	$\omega_1/\omega_2 = 0,7619$	$\omega_2/\omega_b = -0,3125$	$\omega_1/\omega_b = 0,2381$

P 5-6

a) $\omega_1 - \omega_b = -2(\omega_{34} - \omega_b)$; $(\omega_{34} - \omega_b) = \frac{21}{16}(\omega_7 - \omega_b)$

b) $\omega_1 - \omega_b = \frac{9}{4}(\omega_5 - \omega_b)$; $(\omega_1 - \omega_b) = -\frac{27}{8}(\omega_6 - \omega_b)$

P 5-7

a) $z_b = 48$ $z_c = 16$

b) $z_b = 36$ $z_c = 15$

c) $z_b = 48$ $z_c = 24$

P 5-8

$2 \omega_b = \omega_1 + \omega_2$

$\omega_3 = 2 \omega_2 - \omega_1$ $\omega_4 = 2 \omega_1 - \omega_2$

P 5-9

$\omega_3 - 1,5 \omega_4 + 0,5 \omega_1 = 0$

$\omega_6 - 1,4 \omega_3 + 0,4 \omega_1 = 0$

Si $\omega_3 = 0$, $\omega_6 / \omega_1 = -2 / 15$

Si $\omega_4 = 0$, $\omega_6 / \omega_1 = -0,7$

Capítulo 6

P 6-1

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	$V_{F \text{ der.}}$	$V_{F \text{ izq.}}$	H_F
a)	37,79	37,79	120,2	120,2	120,2	120,2	50	50	37,5
b)	151,2	0	0	53,4	53,4	0	0	0	0
c)	-75,58	-75,58	186,9	186,9	186,9	186,9	0	0	75

Todos los valores están en kN y las tensiones de las barras definidas positivas a compresión.

P 6-2

	H_A	V_A	V_B	H_C	V_C	H_D	V_D	H_E	V_E
	137,1	440,2	120,7	25,74	-200	25,74	-700	111,3	640,2

Todos los valores en N.

P 6-3

a) $F_m = 140 l_m \text{ N}$ (l_m : longitud del muelle en m; F_m : fuerza del muelle en N)

c) $m = 1,430 \text{ kg}$ d) $k = 140 \text{ N/m}$

P 6-4

a) $\Gamma_m = I_2 \frac{r \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{e \cos \varphi_2 - r \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \ddot{\varphi}_2$; $F = I_2 \frac{1}{e \cos \varphi_2 - r \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \ddot{\varphi}_2$

b) $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = 180^\circ \rightarrow \Gamma_m = 0$; $F = 0$ $\varphi = \pm 48,59^\circ \rightarrow \Gamma_m = 0$; $F = 846 \text{ N}$

P 6-5

b) F_{A1} (Dirección de la barra) = -2907 N; F_{A1} (Perpendicular a la barra) = 1300 N

b) F_{A2} (Dirección de la barra) = 3658 N; F_{A2} (Perpendicular a la barra) = 0

c) $\Gamma_m = 600 \sin \varphi \text{ Nm}$

P 6-6 a) $d(\varphi) = 320 u^3(1-u)^3 \text{ mm}$ con $u = (\varphi - 240^\circ)/120^\circ$

b) $N = 500 + 0,08754 (1,92 u - 11,52 u^2 + 19,2 u^3 - 9,6 u^4) \dot{\varphi}^2$

c) $\dot{\varphi}_{\text{máx}} = 302,3 \text{ rad/s}$; $n = 2887 \text{ min}^{-1}$

P 6-7 $F = \left(\frac{7}{5} \cos \varphi + \frac{6}{50} \sin \varphi \right) \frac{(0,4225 - 0,3 \cos(\varphi + \beta_0))^{1/2}}{\sin(\varphi + \beta_0)} \text{ kN}$; $\beta_0 = \arctan 0,75$

$T_0 = 1200 \text{ N}$; $k = 1,6 \text{ N/mm}$

P 6-8 a) 85°

b) $F_A = \frac{mgl}{2} \frac{\cos 2\varphi}{l \cos \varphi - s \cos 2\varphi}$

$F_D = \frac{mgl}{2} \frac{\sin \varphi}{l \cos \varphi - s \cos 2\varphi}$

$F_C = -mg + F_A \cos \varphi + F_D \sin 2\varphi$, siendo φ el ángulo que forma la escalera con la dirección horizontal, definido positivo en sentido antihorario.

P 6-9
$$\begin{bmatrix} -\cos \varphi_2 & \sin \varphi_1 & \sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 & \cos \varphi_3 \\ -1 & 0 & \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix}$$

siendo φ_1 , φ_2 y φ_3 los ángulos que forman las barras EB, CA y DC con la vertical, respectivamente, definidos positivos en sentido horario.

$F_B = \frac{5}{3} mg$; $F_C = 0$ cuando la mesa se apoya en la pared.

P 6-10 $F = \frac{40 \sin^2 \varphi}{3 \cos \varphi} \ddot{\varphi}$

Capítulo 7

P 7-1 a) $F = mg \frac{1 - \mu^2 \pm 2\mu / \tan \varphi}{\tan \varphi - \mu}$

el signo + corresponde a un deslizamiento hacia la izquierda
el signo - a un deslizamiento hacia la derecha

b) $F = 1,7 mg$ hacia la izquierda. $F = 0,7 mg$ hacia la derecha.

c) Si $\mu < b/h$, los bloques no vuelcan.

P 7-2 a) $F = 19,51 \text{ N}$

b) $F_{\text{contacto}} = 15,69 \text{ N}$

- P 7-3** a) $s = 0,5 \text{ m}$
b) $s = 1,2 \text{ m}$
- P 7-4** a) $a = 83,48 \text{ mm/s}^2$
b) $a = 77,78 \text{ mm/s}^2$
- P 7-5** a) $\mu_{\text{mín}} = 0,18$
b) $T = 1409 \text{ N}$
- P 7-6** a) $\mu_{\text{mín.}} = 0,238$
b) $T = 287,4 \text{ N}$
- P 7-7** $e = 27 \text{ mm}$
- P 7-8** $\mu_{\text{mín.}} = 0,11$
- P 7-9**
$$\mu_{\text{mín.}} = 2 \frac{\sqrt{20^2 - (h/2)^2}}{100 - h}$$
- P 7-10** $\mu_{\text{mín.}} = 0,2$ independientemente de h .
- P 7-11** $\varphi = 6,42^\circ$
- P 7-12** $\mu_{\text{mín.}} = 0,27$
- P 7-13** $a = 19,29 \text{ mm}$
- P 7-14** a) $\mu_A = 0,23$; $\mu_B = 0,26$
b) $F_A = 15,36 \text{ kN}$; $F_B = 15,46 \text{ kN}$; $F_C = 15,36 \text{ kN}$
- P 7-15** $\Gamma_{\text{máx.}} = 13,7 \text{ g Nm}$; $a_{\text{máx.}} = 0,304 \text{ g m/s}^2$
- P 7-16** a) $a = 0,085 \text{ g m/s}^2$
b) $\mu_{\text{mín.}} = 0,132$
- P 7-17** a) $F = 125 \text{ N}$
b) rodillo A bloqueado $F = 210,8 \text{ N}$
rodillo B bloqueado $F = 168,6 \text{ N}$

Capítulo 8

- P 8-1** a) $F = m_1(g \sin \varphi + \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho)$
 $\Gamma = (m_1 \rho^2 + m_2 e^2 + I_{G_1} + I_{G_2}) \ddot{\varphi} + 2m_1 \rho \dot{\varphi} \dot{\rho} + (m_1 \rho - m_2 e) g \cos \varphi$

b) En el par prismático $T = m_1(g \cos \varphi + 2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \ddot{\varphi}\rho)$
 $M = m_1(g \cos \varphi + 2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \ddot{\varphi}\rho)\rho + I_{G_1}\ddot{\varphi}$

En la articulación $F_1 = F + m_2(g \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 e)$
 $F_2 = T + m_2(g \cos \varphi - \dot{\varphi} e)$

P 8-2 a) Sentido horario $\Gamma = 2,791 \text{ Nm}$
 Sentido antihorario $\Gamma = 3,243 \text{ Nm}$
 b) $F_{\text{mín.}} = 401,7 \text{ N}$ (giro antihorario)

P 8-3 a) $\Gamma_{\text{m}} = 0,4143 \text{ N m}$
 b) $\Gamma_{\text{m}} = 0,4571 \text{ N m}$

P 8-4 a) $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ $F = 20 \sin \varphi + 10 \cos \varphi$ $\Gamma = 0,6 - 12 \cos \varphi + 6 \sin \varphi$
 $-90^\circ \leq \varphi \leq 0$ $F = -20 \sin \varphi + 10 \cos \varphi$ $\Gamma = -0,6 + 12 \cos \varphi + 6 \sin \varphi$

b) $\cos \varphi \geq 0,05$
 $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ $F = -20 \sin \varphi + 10 \cos \varphi$ $\Gamma = -0,6 + 12 \cos \varphi + 6 \sin \varphi$
 $-90^\circ \leq \varphi \leq 0$ $F = -20 \sin \varphi - 10 \cos \varphi$ $\Gamma = -0,6 + 12 \cos \varphi - 6 \sin \varphi$

P 8-5 $\Gamma = 0,5 (1 + \sin 4 \varphi) \cos 4 \varphi \text{ N m}$; $\Gamma_{\text{máx.}} = 0,650 \text{ N m}$ para $\varphi = 7,5^\circ$

P 8-6 $F = 48 \sin \varphi - 40 \tan \varphi$; $F_{\text{máx.}} = 1,705 \text{ N}$ para $\varphi = 15^\circ$

P 8-7 a) $900 = s_1^2 + s_2^2 + \sqrt{3} s_1 s_2$ s_1 y s_2 en milímetros.

Margen de variación: de $\begin{cases} s_1 = 60 \text{ mm} \\ s_2 = -30\sqrt{3} \text{ mm} \end{cases}$ hasta $\begin{cases} s_1 = -30\sqrt{3} \text{ mm} \\ s_2 = 60 \text{ mm} \end{cases}$

b) $F_2 = \frac{s_2 + s_1 \sqrt{3}/2}{s_1 + s_2 \sqrt{3}/2} F_1$

P 8-8 a) $225 = s_1^2 + s_2^2 - \sqrt{3} s_1 s_2$ s_1 y s_2 en milímetros.

b) $F_2 = -\frac{s_2 - s_1 \sqrt{3}/2}{s_1 - s_2 \sqrt{3}/2} F_1$

P 8-9 a) $\Gamma = 6,366 / \tan \varphi \text{ N m}$
 b) $\mu_{\text{mín.}} = 0,08$
 c) $\Gamma_{\text{subida}} = 12,81 / \tan \varphi \text{ N m}$
 $\Gamma_{\text{bajada}} = 0$

P 8-10 $l_2 (l_4 + l_5) = l_3 l_5$

Capítulo 9

- P 9-1** a) $P_{\text{mot.}} = 2,5 \text{ kW}$; $\Gamma_{\text{mot.}} = 31,83 \text{ N m}$
 b) $\Gamma_{\text{máq.}} = 191,0 \text{ N m}$
- P 9-2** $P_{\text{máq.}} = 0,8 \text{ kW}$; $\Gamma_{\text{máq.}} = 25,46 \text{ N m}$
- P 9-3** a) $\alpha = 3 \text{ s}^{-2}$ b) $P_{\text{máq.}} = 628,3 \text{ W}$
- P 9-4** a) $\Gamma_{\text{ruedas}} = 375 \text{ N m}$ b) $F = 1250 \text{ N}$
- P 9-5**
- | | 1a | 2a | 3a | 4a |
|----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| a) | $0,557 \text{ kg m}^2$ | $1,475 \text{ kg m}^2$ | $3,929 \text{ kg m}^2$ | $7,215 \text{ kg m}^2$ |
| b) | $4,39 \text{ m/s}^2$ | $2,66 \text{ m/s}^2$ | $1,56 \text{ m/s}^2$ | $1,10 \text{ m/s}^2$ |
- P 9-6** a) $n_{\text{mot.}} = 1500 \text{ min}^{-1}$; $\Gamma_{\text{mot.}} = 125/3 \text{ N m}$ b) $P_{\text{eléc.}} = 7,27 \text{ kW}$ c) $\Gamma_{\text{rp}} = 25/3 \text{ N m}$
- P 9-7** a) $W_{\text{eléc.}} = 5,316 \text{ kW h}$ b) $I_v = 0,162 \text{ kg m}^2$ (valor muy conservador)
- P 9-8** a) $I_v = 4,053 \text{ kg m}^2$; 25 operaciones ; $t_{\text{total}} = 8,64 \text{ s}$
- P 9-9** a) $P_{\text{eléc.}} = 8,265 \text{ kW}$
 b) $P_{\text{reductor}} = 1,984 \text{ kW}$; $\Gamma_{\text{rp}} = 25,3 \text{ N m}$
 c) $I_{\text{total}} = 5,28 \text{ kg m}^2$; $\delta = 6,14 \%$
 d) $I_{\text{vol. eje 1}} = 5,53 \text{ kg m}^2$; $I_{\text{vol. eje 2}} = 216 \text{ kg m}^2$
 e) $\alpha = 2,601 \text{ rad/s}^2$
- P 9-10** a) $P_{\text{mec.}} = 0,1 \omega (1 - \omega / 600 \pi) \text{ W}$; $P_{\text{eléc.}} = 600 \pi (1 - \omega / 600 \pi) \text{ W}$, con ω en rad/s
 b) $\omega = (1 - e^{-t/60\pi}) 6000 \pi \text{ rad/s}$; $W_{\text{eléc.}} = 36\pi^2 (1 - e^{-t/60\pi}) \text{ kJ}$, con t en segundos
- P 9-11** c) $E_{\text{cons.}} = 11,234 \text{ kJ}$
 $E_{\text{cons.}} = 10 \text{ kJ}$, con motores regenerativos capaces de recuperar la potencia negativa.
- P 9-12** $E_{\text{cons.}} = 11,1 \text{ kW h}$
- P 9-13** a) $t_{\text{total}} = 10 \text{ s}$ b) $m_{\text{red.}} = 4350 \text{ kg}$ c) $F = 24,09 \text{ kN}$ d) $E = 103,8 \text{ J}$
- P 9-14** b) $v_{\text{máx.}} = 24,35 \text{ m/s}$ c) $t = 26,5 \text{ s}$ d) $E_{\text{dis.}} = 1,204 \text{ MJ}$
- P 9-15** a) $P = 2,742 \text{ kW}$ b) grado de irregularidad $\delta = 0,51 \%$
- P 9-16** a) $P = 5,845 \text{ kW}$; $\Gamma = 18,6 \text{ N m}$
 c) $I = 0,237 \text{ kg m}^2$ es suficiente
 d) Resolviendo la ecuación del movimiento, grado de irregularidad $\delta \approx 0,89 \%$

P 9-17 a) $\omega_0 = 400 \text{ rad/s}$

b) $t = 1,29 \text{ s}$

c) $E_{\text{cons.}} = 61,62 \text{ J}$; $E_{\text{eléc. dis.}} = 43,07 \text{ J}$; $E_{\text{mec. dis.}} = 8,31 \text{ J}$

d) $P_{\text{cons.}} = 72 - 0,12 \omega \text{ W}$; $P_{\text{mec.}} = (100 - 0,25 \omega) \omega 10^{-3} \text{ W}$

P 9-18 b) $\omega_{\text{máx.}} = 300 \text{ rad/s}$; $P_{\text{máx.}} = 180 \text{ kW}$ a $\omega = 150 \text{ rad/s}$

c) $\eta = \omega / 300$

d) $t = 20,1 \text{ s}$

e) $E_{\text{cons.}} = 7,2 \text{ MJ}$; $E_{\text{dis.}} = 4,32 \text{ MJ}$

P 9-19 a) $v_{\text{máx.}} = 0,38 \text{ m/s}$ b) $t = 13,2 \text{ s}$ c) $E_{\text{mec. dis.}} = 3,101 \text{ kJ}$ d) $\eta = 0,64$

e) 1. $t = 27,9 \text{ s}$

2. $t = 10,4 \text{ s}$